

Análise estática não linear geométrica de treliças com a formulação Posicional de Elementos Finitos considerando diferentes medidas de deformação

Luiz Antonio Farani de Souza^{1*}

¹ Curso de Engenharia Civil, UTFPR, R. Marcílio Dias, 635, Jardim Paraíso, Apucarana - PR, 86812-460, lasouza@utfpr.edu.br

Geometric nonlinear static analysis of trusses with Positional formulation of Finite Elements considering different strain measures

Resumo

Este artigo apresenta um modelo numérico-computacional para análise estática de treliças planas e espaciais com comportamento não linear geométrico. As estruturas são discretizadas com o método Posicional de Elementos Finitos. As expressões para o vetor de força interna e matriz de rigidez são apresentadas para as medidas de deformação de Engenharia, Green-Lagrange, Logarítmica, Biot e Almansi. Assume-se o comportamento elástico linear para o material. O sistema de equações não lineares é solucionado pelo procedimento incremental e iterativo baseado no método de Potra-Pták. O algoritmo implementado no programa Scilab conseguiu traçar as trajetórias de equilíbrio com pontos limites e reduzir o tempo de processamento em comparação com o método de Newton-Raphson. As análises mostraram as discrepâncias nas respostas das estruturas quando se consideram distintas deformações.

Palavras-chave: *treliça, Potra-Pták, Comprimento de Arco, análise não linear, Scilab.*

Abstract

This paper presents a numerical-computational model for static analysis of plane and spatial trusses with geometric nonlinear behavior. The structures are discretized using the Finite Element Positional method. The expressions for the internal force vector and stiffness matrix are presented for the strain measurements of Engineering, Green-Lagrange, Logarithmic, Biot and Almansi. It is assumed the constitutive relation of the linear elastic material. The system of nonlinear equations is solved by the incremental and iterative procedure based on the Potra-Pták method. The algorithm implemented in the Scilab program was able to trace the equilibrium paths with limit points and reduce the processing time compared to the Newton-Raphson method. The analyzes showed the discrepancies in the responses of the structures when considering different strains.

Keywords: *truss, Potra-Pták, Arc-Length, nonlinear analysis, Scilab.*

* autor correspondente

1 Introdução

As estruturas de aço são amplamente utilizadas na indústria da construção. Embora a teoria fundamental da análise estrutural e formulações elásticas lineares sejam tipicamente usadas para análise/projeto, mesmo que de maneira simplificada, essas estruturas podem sofrer grandes deformações antes de atingir o seu limite de resistência. Portanto, nesse caso, as análises não lineares são mais adequadas visto que conseguem melhor predizer o comportamento preciso das estruturas de aço (Habibi; Bidmeshki, 2018).

Um caso particular de estruturas metálicas são as treliças espaciais que possibilitam vencer grandes vãos de uma forma arquitetonicamente atrativa e estruturalmente econômica, com uma baixa relação entre peso próprio e vão. Elas apresentam a possibilidade de conceber geometrias complexas e uma grande rapidez e facilidade de montagem. As treliças espaciais são um sistema estrutural muito utilizado em edifícios, pontes, plataformas petrolíferas em mar e torres de transmissão, entre outros (Barrigó, 2014).

As treliças espaciais podem experimentar condições de carregamento que causam grandes deslocamentos e que alteram significativamente a geometria das mesmas. Para estruturas geometricamente não lineares, é essencial traçar a curva completa de carga-deslocamento, além de determinar uma estimativa precisa dos pontos limites e de bifurcação (Hrinda, 2007; Koohestani, 2013).

Um dos métodos numéricos mais empregados em análise de treliças é o Método dos Elementos Finitos (MEF), o qual é utilizado na solução de problemas da mecânica dos sólidos sob regime não linear geométrico. Três descrições podem ser consideradas para descrever o movimento, a saber: a Lagrangiana total, a Lagrangiana atualizada e a Corrotacional (Kzam, 2020). Neste artigo é utilizada a formulação Posicional de Elementos Finitos originalmente proposta por Coda (2003). A formulação padrão para o MEF no contexto de sólidos deformáveis é o método de deslocamento (Bathe, 2006), em que as incógnitas fundamentais são os deslocamentos dos nós. Na formulação posicional, diferentemente, as incógnitas são as coordenadas nodais finais ou atuais. A formulação posicional admite que a cinemática seja tanto com relação à descrição

Lagrangeana quanto à Euleriana. Na descrição Lagrangeana, as mudanças de configuração da estrutura são medidas a partir de um referencial fixo no espaço. Na descrição Euleriana, as mudanças de configuração da estrutura são medidas a partir de um referencial que se move pelo espaço (Bathe, 2006; Wong; Tin-Loi, 1990).

Este artigo tem por objetivo apresentar um modelo numérico-computacional para a análise estática de treliças planas e espaciais com comportamento não linear geométrico (hipótese de grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações). São utilizadas cinco medidas de deformação, sendo três descritas em coordenadas materiais (deformação de engenharia, Green-Lagrange e Logarítmica) e duas descritas em coordenadas espaciais (deformação de Biot e Almansi). As expressões para o vetor de força interna e matriz de rigidez são apresentadas para essas medidas. Supõe-se a relação constitutiva do material elástica linear.

O emprego de distintas medidas de deformação na formulação de Elementos Finitos para a análise de estabilidade de treliças foi objeto de estudo de diversos pesquisadores. A deformação de Engenharia, por exemplo, foi utilizada na formulação apresentada por Greco e Ventuni (2006), Yaw (2009) e Yaw (2011), e a deformação de Green-Lagrange foi utilizada por Koohestani (2013). Ademais, as medidas de deformação foram comparadas em análises não lineares geométricas de treliças planas e espaciais. Utilizando o Método Posicional de Elementos Finitos (Lacerda; Maciel; Scudelari, 2013; Tolentino; Souza, 2019) e o Método Corrotacional de Elementos Finitos (Menin; Silva, 2003; Menin, 2006; Miyazaki; Souza; Martins, 2020), foi observado que a resposta de uma estrutura em regime de deformações finitas pode diferir em função da deformação adotada na formulação.

As análises de estabilidade estrutural usando o Método dos Elementos Finitos (MEF) geralmente envolvem a solução de um sistema de equações não lineares. Os algoritmos de solução incremental-iterativa são muito populares e amplamente utilizados para resolver o problema estrutural (Torkamani; Sonmez, 2008).

O método de Newton-Raphson (NR) é um dos métodos mais utilizados para solucionar o sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural. Esse procedimento fornece a solução de pontos na trajetória de equilíbrio da estrutura por meio de um procedimento incremental-iterativo. Neste artigo, o procedimento

baseado no método de Potra-Pták (1984), proposto por Souza et al. (2018), é utilizado para resolver o problema estrutural. O método de Potra-Pták é um método iterativo de dois passos e com convergência cúbica para determinar a raiz de funções não lineares do tipo $f(x) = 0$. No trabalho de Souza et al. (2018), esse método foi adaptado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear num procedimento incremental para resolver o sistema de equações não lineares.

As soluções numéricas aproximadas obtidas com o procedimento de Potra-Pták são comparadas com o procedimento usual de Newton-Raphson (NR) combinado com a técnica Comprimento de Arco Linear, em relação aos seguintes critérios: quantidade total de iterações acumuladas até a convergência, para dada tolerância; e tempo de processamento. As trajetórias de equilíbrio com pontos limites de carga e de deslocamento das estruturas estudadas são mostradas. Os procedimentos de Potra-Pták e de Newton-Raphson foram implementados no programa livre Scilab, versão 6.1.0 (Scilab, 2020).

Os resultados numéricos mostram a melhor eficiência do código computacional implementado e sua aplicabilidade na análise de treliças com comportamento não linear geométrico. Além disso, os resultados numéricos mostram que para deformações infinitesimais a resposta da estrutura coincide independentemente da medida de deformação utilizada na formulação. Entretanto, no caso de deformações finitas a resposta pode diferir.

2 Problema estrutural e método de solução

O objetivo geral da análise não linear é encontrar o equilíbrio da configuração deformada de uma estrutura que está sob a ação de um carregamento aplicado. O sistema de equações não lineares que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com não linearidade geométrica é descrito por (Maximiano; Silva; Silveira, 2014):

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}, \lambda) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}) - \lambda \mathbf{F}_r = \mathbf{0}, \quad (1)$$

na qual $\mathbf{g}$ é o vetor de forças desequilibradas, $\mathbf{F}_{\text{int}}$ é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de coordenadas nos pontos nodais da estrutura $\mathbf{d}$) e λ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor de referência $\mathbf{F}_r$. A

solução do sistema dado em Equação (1) é obtida por meio de um esquema iterativo e incremental. O propósito da presente análise é determinar, ao final de cada passo, o valor do parâmetro de carga λ e do vetor de coordenadas nodais $\mathbf{d}$. Esse sistema tem $(n + 1)$ incógnitas, que são o vetor $\mathbf{d}$ com n elementos e o parâmetro λ , mas somente n equações. Assim, uma equação de restrição é adicionada ao sistema:

$$c(\mathbf{d}, \lambda) = 0. \quad (2)$$

Aplicando o método de Newton-Raphson padrão ao sistema dado pelas Equações (1) e (2), chega-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{g}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d}^{(k+1)} + \frac{\partial \mathbf{g}^{(k)}}{\partial \lambda} \delta \lambda^{(k+1)} = \mathbf{K}^{(k)} \delta \mathbf{d}^{(k+1)} - \delta \lambda^{(k+1)} \mathbf{F}_r = -\mathbf{g}^{(k)}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial c^{(k)}}{\partial \mathbf{d}} \right)^T \delta \mathbf{d}^{(k+1)} + \frac{\partial c^{(k)}}{\partial \lambda} \delta \lambda^{(k+1)} = -c^{(k)}, \quad (4)$$

com

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} + \delta \mathbf{d}^{(k+1)}, \quad (5)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda^{(k+1)}, \quad (6)$$

na qual $\mathbf{K}^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}}$ é a matriz de rigidez (matriz Jacobiana) e $\delta \lambda^{(k)}$ é o subincremento do parâmetro de carga. Nota-se que o sobrescrito $(k + 1)$ indica a iteração corrente e o sobrescrito (k) a iteração anterior, no passo de carga. Isolando o subincremento de coordenadas $\delta \mathbf{d}^{(k+1)}$ na Equação (3) e supondo que $\mathbf{K}$ seja inversível, tem-se:

$$\delta \mathbf{d}^{(k+1)} = \delta \mathbf{d}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k+1)} \delta \mathbf{d}_r^{(k)}, \quad (7)$$

na qual

$$\delta \mathbf{d}_g^{(k)} = -[\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k)}, \lambda^{(k)}), \quad (8)$$

$$\delta \mathbf{d}_r^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}_r, \quad (9)$$

em que $\mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k)}, \lambda^{(k)}) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}^{(k)}) - \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r$. Os incrementos de coordenadas nodais e de carga são determinados por, respectivamente:

$$\Delta \mathbf{d}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{d}^{(k)} + \delta \mathbf{d}^{(k+1)}, \quad (10)$$

$$\Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k+1)}. \quad (11)$$

Utilizando a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear (Riks, 1972; Wempner, 1971), a equação de restrição $c(\mathbf{d}, \lambda)$ é dada por:

$$c(\mathbf{d}, \lambda) = \delta\mathbf{d}^{(k+1)T} \Delta\mathbf{d}^{(0)} = 0. \quad (12)$$

Com a substituição do subincremento $\delta\mathbf{d}^{(k+1)}$ da Equação (7) na Equação (12), chega-se à expressão para o subincremento de carga $\delta\lambda^{(k+1)}$:

$$\left[\delta\mathbf{d}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k+1)} \delta\mathbf{d}_r^{(k)} \right]^T \Delta\mathbf{d}^{(0)} = 0, \quad (13)$$

$$\delta\lambda^{(k+1)} = - \frac{\delta\mathbf{d}_g^{(k)T} \Delta\mathbf{d}^{(0)}}{\delta\mathbf{d}_r^{(k)T} \Delta\mathbf{d}^{(0)}}. \quad (14)$$

Os autores Potra e Pták (1984) desenvolveram um método iterativo de dois passos fundamentado no método de Newton-Raphson, com convergência cúbica, para determinar a raiz de equações não lineares do tipo $f(x) = 0$, e consiste de duas avaliações da função $f(x)$ e de apenas o cálculo de derivadas de primeira ordem $f'(x)$ (Soleymani et al., 2012). O esquema iterativo é dado pelas seguintes equações:

$$y^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad (15)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{[f(x^{(k)}) + f(y^{(k+1)})]}{f'(x^{(k)})}. \quad (16)$$

Esse esquema iterativo proposto por esses autores foi adaptado ao problema estrutural num procedimento incremental cujas equações são (Souza et al., 2018):

$$\delta\mathbf{d}_1^{(k+1)} = \delta\mathbf{d}_g^{(k)} + \delta\lambda_1^{(k+1)} \delta\mathbf{d}_r^{(k)}, \quad (17)$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} + \delta\mathbf{d}_1^{(k+1)}, \quad (18)$$

$$\delta\mathbf{d}_2^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k)})]^{-1} [\delta\lambda_2^{(k+1)} \mathbf{F}_r - \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k+1)}, \lambda^{(k)})], \quad (19)$$

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k+1)} + \delta\mathbf{d}_2^{(k+1)}, \quad (20)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta\lambda_2^{(k+1)}. \quad (21)$$

O cálculo explícito de $[\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k)})]^{-1}$ pode ser evitado resolvendo-se o sistema de equações lineares via decomposição (por exemplo, fatoração LU ou fatoração de Cholesky), visto que uma única fatoração no início do ciclo iterativo é necessária. A equação para o incremento inicial do parâmetro de força (solução predita) é dada por:

$$\Delta\lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta\mathbf{d}_r\|}, \quad (22)$$

na qual $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e Δl representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de carga corrente de acordo com a expressão (Crisfield, 1991):

$$\Delta l = {}^0\Delta l \left(\frac{Nd}{t_k} \right)^{0,5}, \quad (23)$$

em que ${}^0\Delta l$ é o incremento de comprimento de arco no passo de carga inicial ($t = 0$), Nd é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, e t_k é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de carga anterior. O critério de convergência adotado para cada passo de carga é expresso pela norma da força residual e da força total aplicada:

$$\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \cdot \|\mathbf{F}_r\|, \quad (24)$$

na qual tol é a tolerância fornecida pelo usuário. O pseudocódigo do algoritmo do procedimento incremental-iterativo proposto é ilustrado na Figura 1. O vetor de deslocamentos nodais $\mathbf{u}$ é calculado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{d} - {}^0\mathbf{d}, \quad (25)$$

na qual $\mathbf{d}$ é o vetor de coordenadas nodais corrente (convergido no passo de carga corrente) e ${}^0\mathbf{d}$ é vetor de coordenadas nodais na posição inicial (configuração indeformada) da estrutura. Para simulações com o procedimento de Newton-Raphson, no pseudocódigo da Figura 1 considera-se o vetor $\delta\mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$, as etapas de 23 a 27 não são executadas e na etapa 29 substitui-se $\delta\lambda_2$ por $\delta\lambda_1$, uma vez que $\delta\lambda_2 = 0$.

3 Formulação Posicional de Elementos Finitos para treliça 3D

O elemento de treliça 3D é descrito pela formulação Posicional de Elementos Finitos (Coda, 2003). Esse elemento transmite somente forças axiais e tem área da seção

transversal constante A . As coordenadas (X_1, Y_1, Z_1) do nó "1" e (X_2, Y_2, Z_2) do nó "2" representam a configuração inicial do elemento de barra (também conhecida como coordenadas de referência). Após uma mudança de configuração devido a deslocamentos da treliça, a barra passa a ter novas coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) , respectivamente. O comprimento inicial (ou referencial) L_0 e o comprimento atual L da barra são calculados, respectivamente, por:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}, \quad (26)$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (27)$$

Entrada: $n_{\text{máx}}, k_{\text{máx}}, \Delta P, {}^0\Delta l, \text{tol}, N_d, {}^0\mathbf{d}$ Saída: $\mathbf{d}, \mathbf{u}, NP, \lambda, k_{\text{total}}, k_{\text{médio}}, t$ $\mathbf{d} \leftarrow {}^0\mathbf{d}, \Delta\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}, \lambda \leftarrow 0, k_{\text{total}} \leftarrow 0$ $\text{aux} \leftarrow \text{tol} \cdot \ \mathbf{F}_r\$ $\text{tic}()$ (inicia o cronômetro) - Para $NP \leftarrow 1, \dots, n_{\text{máx}}$ - Decomposição de $\mathbf{K}$ nas matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ $\mathbf{a} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{F}_r$ $\delta\mathbf{d}_r \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1} \mathbf{a}$ $\Delta\lambda^{(0)} \leftarrow \Delta l / \ \delta\mathbf{d}_r\$ - Se $\Delta\mathbf{d}^T \delta\mathbf{d}_r < 0$ $\Delta\lambda^{(0)} \leftarrow -\Delta\lambda^{(0)}$ - Terminar a execução da etapa 9 $\Delta\mathbf{d}^{(0)} \leftarrow \Delta\lambda^{(0)} \delta\mathbf{d}_r$ $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d}^{(0)}$ $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda^{(0)}) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$ - Para $k \leftarrow 1, \dots, k_{\text{máx}}$ - Decomposição de $\mathbf{K}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$ nas matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ $\mathbf{a} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{F}_r$ //passo 1 $\delta\mathbf{d}_r \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1} \mathbf{a}$ $\mathbf{a} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{g}$ $\delta\mathbf{d}_g \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1} \mathbf{a}$	$\delta\lambda_1 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)$ $\delta\mathbf{d}_1 \leftarrow \delta\mathbf{d}_g + \delta\lambda_1 \delta\mathbf{d}_r$ $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}_1)$ $\mathbf{a} \leftarrow [\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{g}$ //passo 2 $\delta\mathbf{d}_g \leftarrow [\mathbf{U}]^{-1} \mathbf{a}$ $\delta\lambda_2 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)$ $\delta\mathbf{d}_2 \leftarrow \delta\mathbf{d}_g + \delta\lambda_2 \delta\mathbf{d}_r$ $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}_1 + \delta\mathbf{d}_2$ $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda_2$ $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$ - Se $\ \mathbf{g}\ < \text{aux}$ - Terminar a execução da etapa 15 - Terminar a execução da etapa 31 - Terminar a execução da etapa 15 $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}$ $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda$ $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{d} - {}^0\mathbf{d}$ $\Delta l \leftarrow {}^0\Delta l (N_d/k)^{0,5}$ $k_{\text{total}} \leftarrow k_{\text{total}} + k$ - Terminar a execução da etapa 4 $k_{\text{médio}} \leftarrow k_{\text{total}} / NP$ $t = \text{toc}()$ (lê o cronômetro)
---	--

Figura 1 – O pseudocódigo do algoritmo para o método de solução.

A seguir são apresentadas as expressões para a matriz de rigidez ($\mathbf{K}_{\text{elem}}$) e o vetor de força interna ($\mathbf{F}_{\text{elem}}$) do elemento de treliça 3D para diferentes medidas de deformação - Almansi, Biot, Engenharia, Green-Lagrange e Logarítmica. Neste artigo, foram desenvolvidas matematicamente as expressões para as deformações de Almansi e Biot.

3.1 Deformação de Almansi

A deformação de Almansi (ε_A) é dada por (Bonet; Wood, 2008):

$$\varepsilon_A = \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2} = \frac{1}{2} - \frac{L_0^2}{2L^2}, \quad (28)$$

na qual $L(\mathbf{x})$ é uma de função de $\mathbf{x}$ e L_0 é constante. O gradiente de deformação $\partial\varepsilon_A/\partial\mathbf{x}$ é determinado por:

$$\frac{\partial\varepsilon_A}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \left[\frac{1}{2} - \frac{L_0^2}{2L^2} \right] = 0 - L_0^2 \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \left[\frac{L^{-2}}{2} \right] = \frac{L_0^2}{L^3} \frac{\partial L}{\partial\mathbf{x}}. \quad (29)$$

Como $\frac{\partial L}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{m}}{L}$ (Lacerda, 2014), então:

$$\frac{\partial\varepsilon_A}{\partial\mathbf{x}} = \frac{L_0^2}{L^3} \frac{\mathbf{m}}{L} = \frac{L_0^2}{L^4} \mathbf{m}, \quad (30)$$

na qual $\mathbf{m} = [x_1 - x_2 \quad y_1 - y_2 \quad z_1 - z_2 \quad x_2 - x_1 \quad y_2 - y_1 \quad z_2 - z_1]^T$, e x_i , z_i e y_i , para $i = 1, 2$, são as coordenadas nodais na configuração deformada do elemento de barra. Considerando um material isotrópico, homogêneo e elástico e, de acordo com a lei de Hooke, a energia de deformação U é calculada em coordenadas espaciais por:

$$U = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon_A^2 dV = \int_0^L \frac{1}{2} E \varepsilon_A^2 A dL = \frac{1}{2} E A L \varepsilon_A^2, \quad (31)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal e A é a área da seção transversal da barra. O vetor de força interna elementar $\mathbf{F}_{\text{elem}}$ é calculado por:

$$\mathbf{F}_{\text{elem}} = \frac{\partial U}{\partial\mathbf{x}} = E A L \varepsilon_A \frac{\partial\varepsilon_A}{\partial\mathbf{x}} + \frac{1}{2} E A \varepsilon_A^2 \frac{\partial L}{\partial\mathbf{x}}, \quad (32)$$

$$\mathbf{F}_{\text{elem}} = E A L \varepsilon_A \frac{L_0^2}{L^4} \mathbf{m} = E A \varepsilon_A \frac{L_0^2}{L^3} \mathbf{m},$$

uma vez que $\varepsilon_A^2 \approx 0$ (hipótese de grandes deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações). A matriz de rigidez tangente elementar $\mathbf{K}_{\text{elem}}$ é dada por:

$$\mathbf{K}_{\text{elem}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{elem}}}{\partial\mathbf{x}}, \quad (33)$$

$$\mathbf{K}_{\text{elem}} = L_0^2 E A \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} (\varepsilon_A L^{-3} \mathbf{m}) = \frac{L_0^2}{L^3} E A \varepsilon_A \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial\mathbf{x}} + L_0^2 E A \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} (\varepsilon_A L^{-3}).$$

A derivada $\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} (\varepsilon_A L^{-3})$ é determinada como segue:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} (\varepsilon_A L^{-3}) = \frac{\partial\varepsilon_A}{\partial\mathbf{x}} L^{-3} + \left(-3\varepsilon_A L^{-4} \frac{\partial L}{\partial\mathbf{x}} \right), \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\epsilon_A L^{-3}) = \frac{L_0^2}{L^4} \mathbf{m} L^{-3} - 3\epsilon_A L^{-4} \frac{\mathbf{m}}{L} = \left(\frac{L_0^2}{L^7} - \frac{3\epsilon_A}{L^5} \right) \mathbf{m}. \quad (35)$$

Assim, matriz de rigidez $\mathbf{K}_{\text{elem}}$ fica:

$$\mathbf{K}_{\text{elem}} = \mathbf{K}_{\mathbf{M}} + \mathbf{K}_{\mathbf{G}}, \quad (36)$$

na qual $\mathbf{K}_{\mathbf{M}}$ é a matriz de rigidez material e $\mathbf{K}_{\mathbf{G}}$ é a matriz de rigidez geométrica dadas por, respectivamente:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{M}} = L_0^2 EA \left(\frac{L_0^2}{L^7} - \frac{3\epsilon_A}{L^5} \right) \mathbf{m} \mathbf{m}^T, \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{G}} = \frac{L_0^2}{L^3} EA \epsilon_A \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (38)$$

A derivada $\partial \mathbf{m} / \partial \mathbf{x}$ é:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

na qual $\mathbf{I}_3$ é a matriz identidade de ordem três.

3.2 Deformação de Biot

A dedução da deformação de Biot é análoga à deformação de Almansi. A deformação de Biot (ϵ_B) é dada por (Menin, 2006):

$$\epsilon_B = \frac{L - L_0}{L} = 1 - \frac{L_0}{L}, \quad (40)$$

O gradiente de deformação $\partial \epsilon_B / \partial \mathbf{x}$ é determinado por:

$$\frac{\partial \epsilon_B}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[1 - \frac{L_0}{L} \right] = 0 - L_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [L^{-1}] = \frac{L_0}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{L_0}{L^3} \mathbf{m}. \quad (41)$$

A energia de deformação U fica:

$$U = \frac{1}{2} EAL \epsilon_B^2. \quad (42)$$

O vetor de forças internas $\mathbf{F}_{\text{elem}}$ é dado por:

$$\mathbf{F}_{\text{elem}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = EAL \epsilon_B \frac{\partial \epsilon_B}{\partial \mathbf{x}} = EAL \epsilon_B \frac{L_0}{L^3} \mathbf{m} = \frac{L_0}{L^2} EA \epsilon_B \mathbf{m}. \quad (43)$$

A matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{\text{elem}}$ é dada por:

$$\mathbf{K}_{\text{elem}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{elem}}}{\partial \mathbf{x}} = L_0 EA \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\varepsilon_B L^{-2} \mathbf{m}), \quad (44)$$

$$\mathbf{K}_{\text{elem}} = \frac{L_0}{L^2} EA \varepsilon_B \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} + L_0 EA \mathbf{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\varepsilon_B L^{-2}).$$

Como $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{m}}{L}$ e utilizando a Equação (41), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\varepsilon_B L^{-2}) = \frac{\partial \varepsilon_B}{\partial \mathbf{x}} L^{-2} + \left(-2 \varepsilon_B L^{-3} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left(\frac{L_0}{L^5} - \frac{2 \varepsilon_B}{L^4} \right) \mathbf{m}, \quad (45)$$

então,

$$\mathbf{K}_{\text{elem}} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G, \quad (46)$$

na qual $\mathbf{K}_M$ é a matriz de rigidez material e $\mathbf{K}_G$ é a matriz de rigidez geométrica dadas por, respectivamente:

$$\mathbf{K}_M = L_0 EA \left(\frac{L_0}{L^5} - \frac{2 \varepsilon_B}{L^4} \right) \mathbf{m} \mathbf{m}^T, \quad (47)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{L_0}{L^2} EA \varepsilon_B \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (48)$$

3.3 Matriz de rigidez e vetor de força interna para outras medidas de deformação

Na Tabela 1 aparecem as expressões para o vetor de força interna e matriz de rigidez para as medidas de deformação de Engenharia, Green-lagrange e Logarítmica. O desenvolvimento matemático das expressões para essas medidas pode ser encontrado em Lacerda (2014).

Tabela 1 – Medidas de deformação, vetor de força interna e matriz de rigidez.

Medida de Deformação	Deformação (ε)	$\mathbf{F}_{\text{elem}}$	$\mathbf{K}_{\text{elem}} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G$
Engenharia (ε_E)	$\frac{L - L_0}{L_0}$	$\frac{EA \varepsilon_E}{L} \mathbf{m}$	$\mathbf{K}_M = \frac{EA}{L^3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T$ $\mathbf{K}_G = \frac{EA \varepsilon_E}{L} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}}$
Green-Lagrange (ε_G)	$\frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}$	$\frac{EA \varepsilon_G}{L_0} \mathbf{m}$	$\mathbf{K}_M = \frac{EA}{L_0^3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T$ $\mathbf{K}_G = \frac{EA \varepsilon_G}{L_0} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}}$
Logarítmica (ε_L)	$\ln \left(\frac{L}{L_0} \right)$	$\frac{EAL_0 \varepsilon_L}{L^2} \mathbf{m}$	$\mathbf{K}_M = \frac{EAL_0}{L^4} (1 - 2\varepsilon_L) \mathbf{m} \mathbf{m}^T$ $\mathbf{K}_G = \frac{EAL_0 \varepsilon_L}{L^2} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}}$

Fonte: Lacerda (2014).

4 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de treliças encontrados na literatura científica, levando-se em conta na análise estática a não linearidade geométrica e as diferentes medidas de deformação - Engenharia, Green-Lagrange, Biot, Almansi e Logarítmica. O algoritmo (Figura 1) foi implementado com o *software* livre Scilab, versão 6.1.0 (Scilab, 2020). Os testes computacionais foram realizados em um computador Core i7 - 3537U com 8GB de memória. O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises. Ressalta-se, ainda, que não estão contabilizadas no tempo de processamento a geração da malha e a visualização dos resultados. Para o término das simulações, foi estabelecida uma condição envolvendo o deslocamento máximo em um nó determinado da estrutura e/ou um valor máximo para a carga total.

4.1 Treliça plana abatida não simétrica

Considere a treliça ilustrada na Figura 2, a qual corresponde a uma cobertura articulada plana, abatida e não simétrica. Esta estrutura tem 18 nós e 33 elementos de barra, com rigidez axial adimensional $EA = 9,0 \times 10^6$ e está submetida ao efeito de três cargas nodais P de igual intensidade. Na Tabela 2 são listados os números totais de passos de carga (NC) e de iterações acumuladas até a convergência para a solução (k_{total}), número médio de iterações por passo ($k_{médio}$) e tempo de processamento t (em segundos), obtidos nas simulações com o algoritmo implementado e o método de Newton-Raphson padrão. O sistema de equações não lineares tem 36 incógnitas.

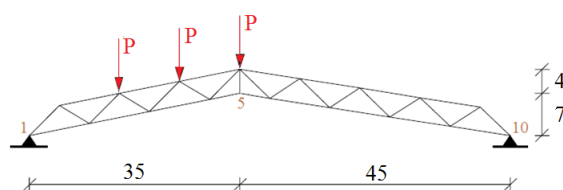


Figura 2 – Modelo estrutural da treliça plana abatida não simétrica.

Na Figura 3 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical no nó 5 *versus* carga P) com pontos limites de força e de deslocamento, havendo boa concordância com os resultados de Menin (2006). Os parâmetros considerados nas

análises para os métodos de solução são: ${}^0\Delta l = 1,0$; $Nd = 4$; $tol = 1,0 \times 10^{-7}$; $k_{m\acute{a}x} = 150$; e $\Delta P = 100$.

Tabela 2 - Resultados numéricos para a treliça plana.

Medida de deformação	NC	k_{total}	$k_{m\acute{e}dio}$	t (s)
Engenharia	43 (50)	88 (141)	2,046 (2,820)	3,059 (3,606)
Green-Lagrange	43 (50)	88 (144)	2,046 (2,880)	3,077 (3,705)
Biot	44 (51)	90 (144)	2,045 (2,823)	3,207 (3,783)
Almansi	45 (54)	92 (157)	2,044 (2,907)	3,324 (4,129)
Logarítmica	43 (51)	87 (144)	2,023 (2,823)	3,058 (3,788)

Os valores numéricos entre parênteses referem-se ao procedimento de NR.

Na Figura 3 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical no nó 5 *versus* carga P) com pontos limites de força e de deslocamento, havendo boa concordância com os resultados de Menin (2006). Os parâmetros considerados nas análises para os métodos de solução são: ${}^0\Delta l = 1,0$; $Nd = 4$; $tol = 1,0 \times 10^{-7}$; $k_{m\acute{a}x} = 150$; e $\Delta P = 100$.

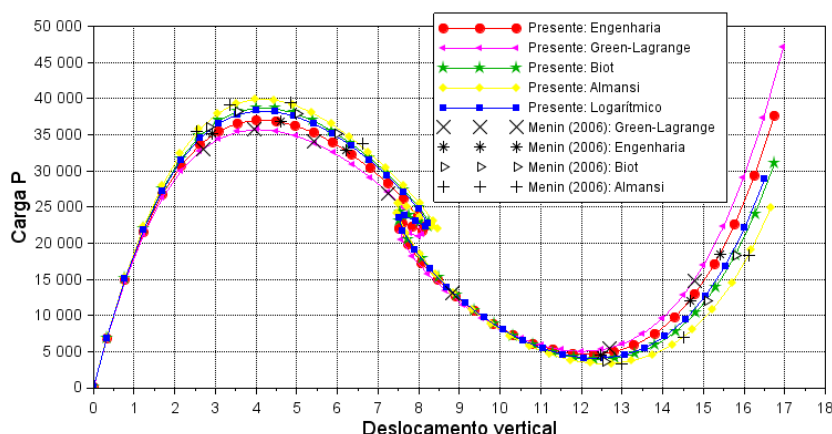


Figura 3 – Trajetórias de equilíbrio da treliça plana abatida não simétrica obtidas com o presente algoritmo e com a referência (Menin, 2006).

4.2 Cúpula em forma de estrela

Um problema de referência para as treliças espaciais é a cúpula em forma de estrela ilustrada na Figura 4. Este problema é discutido em Greco e Venturini (2006), Wriggers (2008) e Yaw (2011), entre outros. A treliça consiste de 24 elementos de barra e 13 nós, cujas barras têm rigidez axial $EA = 1,0 \times 10^3$ N. Essa estrutura apresenta seis nós restringidos nas direções x, y e z, sendo esses nós representados na vista em planta da estrutura por círculos hachurados.

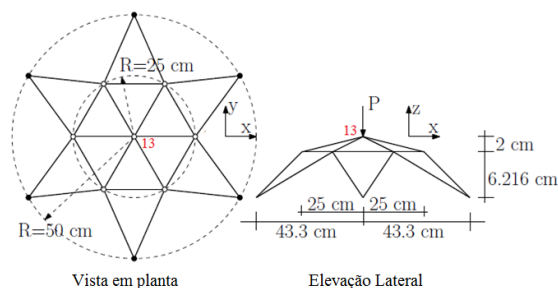


Figura 4 – Modelo estrutural da cúpula em forma de estrela. Fonte: adaptada de Yaw (2011).

As trajetórias de equilíbrio com pontos limites de força e de deslocamento utilizando as medidas de deformação de Engenharia, Green-Lagrange e Almansi são apresentadas na Figura 5. Nota-se razoável concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Yaw (2011), que utilizou a formulação Corrotacional de Elementos Finitos e a medida de Engenharia. Os parâmetros considerados nas análises para os métodos de solução são: $\Delta l = 0,4$; $N_d = 3$; $tol = 1,0 \times 10^{-6}$; $k_{máx} = 150$; e $\Delta P = 1,0$ N. Na Tabela 3 aparecem os resultados numéricos (NC, k_{total} , $k_{médio}$ e t) obtidos com o algoritmo implementado e o método de Newton-Raphson padrão. O sistema de equações tem 39 incógnitas.

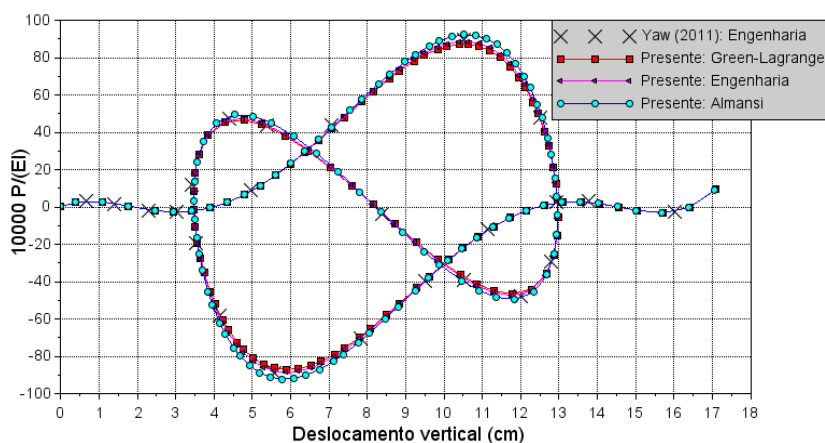


Figura 5 – Trajetórias de equilíbrio da cúpula em forma de estrela obtidas com o presente algoritmo e com a referência (Yaw, 2011).

Tabela 3 - Resultados numéricos da cúpula em forma de estrela.

Medida de deformação	NC	k_{total}	$k_{médio}$	t (s)
Engenharia	104 (106)	166 (217)	1,596 (2,047)	7,236 (7,550)
Green-Lagrange	104 (107)	166 (219)	1,596 (2,046)	7,254 (7,625)
Almansi	103 (106)	162 (216)	1,572 (2,037)	7,211 (7,562)

Os valores numéricos entre parênteses referem-se ao procedimento de NR.

4.3 Cúpula

Considere a treliça espacial em forma de cúpula, cujas características geométricas são apresentadas na Figura 6. Esta estrutura foi estudada por Matias (2002) e apresenta 25 nós e 60 elementos de barra com rigidez axial adimensional $EA = 1,0 \times 10^4$. Ela é submetida a sete forças nodais verticais P de igual magnitude aplicadas do nó 13 ao 18. Essa estrutura apresenta seis nós restringidos nas direções x , y e z , sendo esses nós representados na vista em planta da estrutura por círculos hachurados. As trajetórias de equilíbrio com pontos limites de força e de deslocamento (curvas deslocamento no nó 25 *versus* carga P), considerando as medidas de deformação de Almansi, Green-Lagrange, Engenharia e Biot, são mostradas na Figura 7. Vê-se, nessa figura, que houve boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Matias (2002) para a deformação de Green-Lagrange.

Os parâmetros considerados nas análises para os métodos de solução de Potra-Pták e Newton-Raphson são: $^0\Delta l = 4,0$; $N_d = 3$; $tol = 1,0 \times 10^{-6}$; $k_{m\acute{a}x} = 150$; e $\Delta P = 0,1$. Os resultados numéricos (NC , k_{total} , $k_{m\acute{e}dio}$ e t) obtidos com o algoritmo implementado e o método de Newton-Raphson padrão (os valores numéricos estão entre parênteses) aparecem na Tabela 4. O sistema de equações não lineares do problema apresenta 75 incógnitas. Na Figura 8a é apresentada a posição deformada da cúpula para o passo de carga $NC = 94$ obtida com a deformação de Green-Lagrange. Na Figura 8b aparecem as posições dos elementos não nulos da matriz de rigidez.

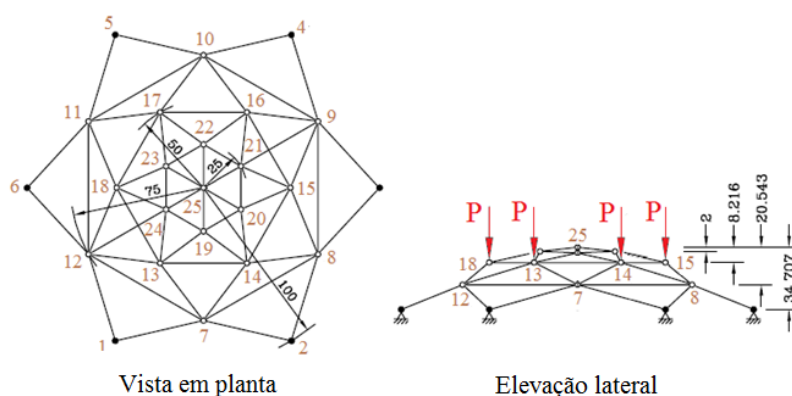


Figura 6 – Modelo estrutural da cúpula. Fonte: adaptada de Matias (2002).

Tabela 4 - Resultados numéricos da treliça espacial em forma de cúpula.

Medida de deformação	NC	k_{total}	$k_{médio}$	t (s)
Almansi	95 (106)	192 (278)	2,021 (2,622)	22,753 (25,728)
Green-Lagrange	94 (107)	190 (287)	2,021 (2,682)	21,940 (27,286)
Engenharia	95 (107)	192 (287)	2,021 (2,682)	22,752 (27,194)
Biot	95 (*)	192 (*)	2,021 (*)	22,566 (*)

* Não convergiu.

Os valores numéricos entre parênteses referem-se ao procedimento de NR.

4.4 Discussão dos resultados numéricos

O algoritmo implementado (Figura 1) no programa Scilab conseguiu traçar as trajetórias de equilíbrio com pontos limites de carga (tangente horizontal) e pontos limites de deslocamento (tangente vertical) das treliças analisadas. O dispositivo para a verificação da mudança do sinal do incremento de carga inicial $\Delta\lambda^{(0)}$ na passagem por pontos limites (ver linhas 9 a 11 do algoritmo na Figura 1) é de fácil implementação computacional e apresentou resultados precisos.

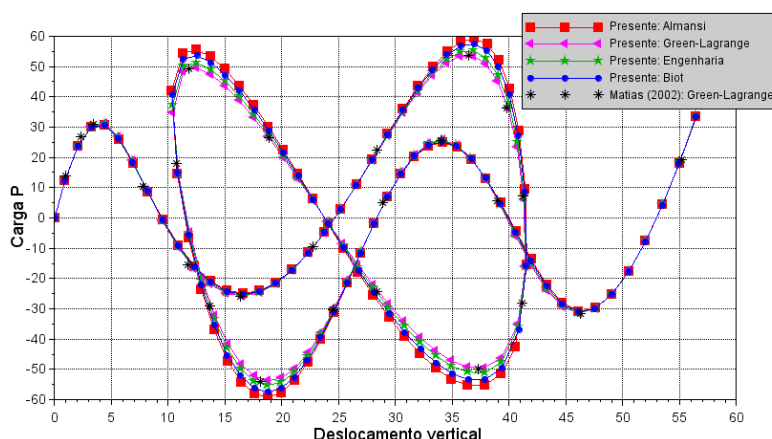


Figura 7 – Trajetórias de equilíbrio da cúpula obtidas com o presente algoritmo e com a referência (Matias, 2002).

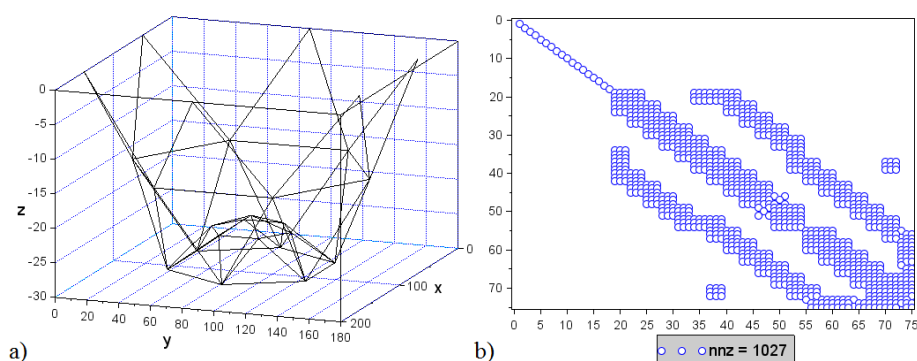


Figura 8 – Cúpula: a) posição deformada e b) posições dos elementos não nulos da matriz de rigidez.

Ficou evidente em todas as trajetórias que as treliças apresentaram comportamento similar para os níveis iniciais de carregamento. De fato, quando as deformações são infinitesimais as posições inicial e corrente da estrutura se confundem e, conseqüentemente, a resposta mecânica da estrutura coincide independentemente da medida de deformação adotada na análise. Segundo Bonet e Wood (2008), nesse caso os comprimentos L e L_0 são aproximadamente iguais ($L \approx L_0$) e convergem para a definição de pequena deformação $\Delta L/L$. Utilizando uma análise de série de Taylor, tem-se, por exemplo, para a deformação de Biot:

$$\varepsilon_B(L \approx L_0) = \frac{L + \Delta L - L}{L} = \frac{\Delta L}{L}. \quad (49)$$

Fazendo a mesma análise para a deformação de Almansi, tem-se:

$$\varepsilon_A(L \approx L_0) = \frac{(L + \Delta L)^2 - L^2}{2L^2} = \frac{L^2 + 2L\Delta L + \Delta L^2 - L^2}{2L^2} = \frac{\Delta L}{L}, \quad (50)$$

visto que foi desprezado o termo de ordem maior ($\Delta L^2 \approx 0$). Nota-se que as análises para ambas as deformações convergiram para $\Delta L/L$. O mesmo procedimento pode ser feito para as demais deformações.

Quando se tem deformações finitas, a resposta da estrutura pode diferir com a escolha da medida de deformação. Vê-se nas trajetórias de equilíbrio (Figuras 3, 5 e 7) que houve discrepâncias entre as curvas de acordo com as medidas de deformação adotadas, notadamente nas regiões próximas a pontos limites. Também, observa-se que as maiores diferenças ocorreram entre as deformações de Green-Lagrange e Almansi.

A iteração do procedimento incremental com o método de Potra-Pták (PP) é mais cara computacionalmente em comparação com o procedimento de Newton-Raphson (NR), pois no ciclo iterativo (correção da solução predita) do primeiro método há resolução de três sistemas de equações lineares (gerados da formulação de elementos finitos) e duas atualizações do vetor de força interna global $\mathbf{F}_{int}$, enquanto que no segundo caso há dois sistemas de equações lineares a serem resolvidos e uma atualização do vetor de força interna. No entanto, o método PP mostrou-se mais eficiente, uma vez que a quantidade de incrementos de carga e iterações acumuladas para a convergência da solução dos problemas foi inferior para a tolerância considerada.

A matriz de rigidez do sistema estrutural $\mathbf{K}$ é caracterizada por um alto índice de esparsidade. Na Figura 8b é apresentado um mapa das posições dos elementos não nulos da matriz de rigidez para o problema da cúpula; o grau de esparsidade (nº de elementos nulos/número total de elementos x 100) dessa matriz é 81,88 %. É possível obter uma melhor eficiência numérica do modelo apresentado por meio de algoritmos que armazenam os coeficientes não nulos presentes na matriz e realizam operações entre matrizes e vetores com esses coeficientes, evitando cálculos redundantes envolvendo elementos nulos. No Scilab pode-se utilizar a função *sparse*, a qual converte uma matriz completa para sua forma esparsa retirando qualquer elemento nulo.

5 Conclusão

Para estruturas geometricamente não lineares, é essencial traçar a curva completa de carga-deslocamento, além de determinar uma estimativa precisa dos pontos limites. Neste artigo, foi desenvolvido um programa computacional com a formulação Posicional de Elementos Finitos para análise estática de treliças planas e espaciais com não linearidade geométrica utilizando cinco medidas de deformação - Engenharia, Green-Lagrange, Biot, Almansi e Logarítmica. A solução do problema não linear foi obtida por meio do procedimento incremental e iterativo baseado no método de Potra-Pták associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear.

As expressões para a matriz de rigidez e vetor de força interna do elemento de treliça 3D, referentes ao método Posicional de Elementos Finitos, para as medidas de Almansi e Biot foram desenvolvidas matematicamente a partir da energia específica U . A formulação posicional é uma alternativa viável para as formulações tradicionais do método dos Elementos Finitos, tanto por causa da praticidade na implementação computacional bem como pelo bom desempenho mostrado nas aplicações numéricas submetidas neste artigo.

O código desenvolvido em ambiente Scilab mostrou-se eficiente, visto que conseguiu traçar as trajetórias completas de equilíbrio das estruturas analisadas, e alcançar a solução dos problemas com um tempo menor de CPU em comparação com o procedimento clássico de Newton-Raphson. A convergência dos resultados foi

atingida, em todos os casos, com um número médio de iterações por passo de carga aproximadamente dois ou menor.

Por fim, conclui-se que a resposta da estrutura pode diferir completamente de acordo com a medida de deformação considerada na análise. Sendo assim, a consideração de distintas medidas de deformação na formulação de Elementos Finitos contribui para análise e concepção de projetos estruturais mais precisos, e com a predição de relações constitutivas de materiais mais próxima do observado em ensaios de laboratório.

Recomenda-se, como direção para trabalhos futuros, a implementação da não linearidade física utilizando modelos constitutivos de Dano ou Elastoplásticos, adaptar o programa para análise dinâmica e realizar estudos com problemas de treliças espaciais de maior porte (número maior de graus de liberdade).

6 Referências bibliográficas

- BARRIGÓ, J. M. B. C. **Análise Não Linear de Treliças Espaciais**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Técnico, Lisboa, Portugal.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Cambridge, MA: Klaus-Jrgen Bathe, 2006.
- BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- GRECO, M.; VENTURIN, W. S. Stability analysis of three-dimensional trusses. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 3, n. 3, p. 325-344, 2006.
- CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Vol. 1: Essentials. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- HABIBI, A.; BIDMESHKI, S. A dual approach to perform geometrically nonlinear analysis of plane truss structures. **Steel and Composite Structures**, v. 27, n. 1, p. 13-25, 2018.
- HRINDA, G. A. Geometrically nonlinear static analysis of 3D trusses using the arc-length method. In: C.A. Brebbia G. M. Carlomagno (Editores). **Computational Methods and Experimental Measurements XIII**. Boston: WIT Press, 2007. p. 243-252.
- KOOHESTANI, K. A hybrid method for efficient solution of geometrically nonlinear structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, n. 1, p. 21-29, 2013.
- KZAM, A. K. L. Determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio não linear do elemento finito de treliça posicional. **Revista da Estrutura de Aço - REA**, v. 9, n. 1, 2020.
- LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Natal, RN.

LACERDA, E. G. M.; MACIEL, D. N.; SCUDELARI, A. C. Geometrically static analysis of trusses using the arc-length method and the positional formulation of Finite Element Method. In: XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2014, Fortaleza, CE, Brasil. **Anais...** Fortaleza: XXXV CILAMCE, 2014.

MATIAS, W. T. El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 18, n. 4, p. 549-572, 2002.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Revista Escola de Minas (Impresso)**, v. 67, n. 2, p. 143-150, 2014.

MENIN, R. C. G. **Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas**. 2006. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil.

MENIN, R. C. G.; SILVA, W. T. M. Resposta pós-crítica de sistemas articulados com diferentes deformações utilizando uma formulação co-rotacional. In: XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2003, Ouro Preto, MG, Brasil. **Anais...** Ouro preto: XXIV CILAMCE, 2003.

MIYAZAKI, J. P. L.; SOUZA, L. A. F.; MARTINS, C. H. Análise não linear de treliças com a formulação corrotacional de elementos finitos e diferentes medidas de deformações. **Revista Tecnológica**, v. 29, n. 2, p. 499-515, 2020.

POTRA, F. A.; PTÁK V. **Nondiscrete induction and iterative processes**, Research Notes in Mathematics, vol. 103. Boston: Pitman Advanced Publishing Program, 1984.

RIKS, E. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 39, n. 4, p. 1060-10656, 1972.

SCILAB, version 6.1.0. **ESI Group**, 2020.

SOLEYMANI, F.; SHARMA, R.; LI, X.; TOHIDI, E. An optimized derivative-free form of the Potra–Pták method. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 56, n. 5-6, p. 97-104, 2012.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; ALIANO FILHO, A.; MACHADO, R. D. Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order. **TEMA (São Carlos)**, v. 19, n. 1, p. 161-179, 2018.

TOLENTINO, L. D.; SOUZA, L. A. F. Análise comparativa entre medidas de deformação em estruturas de barra. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 40, n. 2, p. 161-168, 2019.

TORKAMANI, M. A. M.; SONMEZ, M. Solution techniques for nonlinear equilibrium equations. In: Structures Congress 2008: 18th Analysis and Computation Specialty Conference, 2008, Vancouver, Canadá. **Proceedings...** Vancouver: 2008 ASCE, 2008. p. 1-17.

WEMPNER, G. Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, p. 1581–1599, 1971.

WONG, M. B.; TIN-LOI, F. Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. **Computers & Structures**, v. 34, n. 4, p. 633-640, 1990.

WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

YAW, L. L. **2D Co-rotational Truss Formulation**. Walla Walla: Walla Walla University, 2009.

YAW, L. L. **3D Co-rotational Truss Formulation**. Walla Walla: Walla Walla University, 2011.